**3.25. Teorema de L'Hospital**

**3.26. Fungsi Cekung (ke atas/ ke bawah) dan Titik Belok**

Pada bagian ini dibahas kecekungan dari grafik suatu fungsi yang bernilai tunggal dan terdeferensiabel pada suatu selang terbuka.

***Definisi 1***. Suatu kurva disebut cembung ke atas atau cekung ke bawah pada interval buka (a,b), jika semua titik pada kurva terletak ***di bawah*** dari sebarang tangen pada interval buka tersebut.

Suatu kurva disebut cembung ke bawah atau cekung ke atas pada interval buka (a,b), jika semua titik pada kurva terletak ***di atas*** dari sebarang tangen pada interval buka tersebut.

Secara simbolik

Kurva y = f(x) cembung ke atas pada (a,b) ⇒ f '(xi) > f(xi) untuk ∀(xi) ∈ (a,b).

Kurva y = f(x) cekung ke atas pada (a,b) ⇒ f '(xi) < f(xi) untuk ∀(xi) ∈ (a,b).

Definisi Kecekungan yang lain.

Suatu fungsi f yang turunan pertamanya naik pada seluruh interval buka (a,b) disebut cekung ke atas.

Suatu fungsi f yang turunan pertamanya turun pada seluruh interval buka (a,b) disebut cembung ke atas.

***Teorema 1***. Jika semua titik pada interval buka (a,b) turunan kedua dari fungsi f(x) negatif atau f ''(x) < 0, kurva y = f(x) pada interval ini adalah cembung ke atas.

Jika semua titik pada interval buka (a,b) turunan kedua dari fungsi f(x) positif f ''(x) > 0, kurva y = f(x) pada interval ini adalah cekung ke atas.

**Bukti**. Pertama kali dibuktikan jika semua titik pada interval buka (a,b) turunan kedua dari fungsi f(x) negatif f ''(x) < 0, kurva y = f(x) pada interval ini adalah cembung ke atas. Untuk membuktikan teorema ini ditunjukkan bahwa f '(xi) < f (xi), ∀xi ∈ (a,b). Pada interval buka (a,b) dengan a ≠ b, maka paling sedikit terdapat satu titik x = x1 ∈ (a,b).

Persamaan kurva adalah berbentuk y = f(x) (1)

Persamaan yang melalui titik (x1, f(x1) bergradien f '(x1)

adalah

- f(x1) = f '(x1)(x – x1) atau

= f(x1) + f '(x1)(x – x1) (2)

Persamaan (1) dikurang dengan persamaan (2) diperoleh

y - = f(x) - f(x1) – f '(x1) (x – x1)

Dengan menggunakan teorema Langrange pada f(x) - f(x1) diperoleh

y - = f '(c) (x – x1) – f '(x1) (x – x1)

(c terletak antara x dan x1) atau\_

y - = {f '(c) – f '(x1)} (x – x1)

Dengan menggunakan teorema Lagrange pada f '(c) – f '(x1) diperoleh

y - = f ''(c1) (c - x1) (x – x1) (3)

(c1 terletak antara c dan x1)

Pertama-tama diuji kasus bila x > x1 . Dalam kasus ini, x1 < c < x diperoleh c > x1 atau c – x1 > 0 dan x > x1 atau x – x1 > 0.

Diketahui f ''(c ) < 0, maka persamaan (3) menjadi

y - < 0 atau y > (4)

Selanjutnya diuji kasus bila x< x1 . Dalam kasus ini x< c < x1 , dengan x - x1< 0 atau x1 > x dan c – x1 < 0 atau x1 > c.

Karena f ''(c) < 0, maka persamaan (3) menjadi

y - < 0 atau y > (5)

Karena x dan x1 sebarang titik pada kurva y = f(x), dengan demikian terbukti bahwa setiap titik pada kurva tersebut terletak di bawah tangen dari kurva tersebut. Jadi, kurva y = f(x) pada interval buka (a,b) adalah cembung ke atas. ∎

Untuk bukti "jika semua titik pada interval buka (a,b) turunan kedua dari fungsi f(x) positif f ''(x) > 0, kurva y = f(x) pada interval ini adalah cekung ke atas" identik dengan bukti di atas diberikan sebagai latihan.

Contoh 1: Tentukan interval/selang cekung ke atas dan cekung ke bawah/ cembung ke atas dari

a) f(x) = 2x3 - 6x2 - 24x + 12 dengan D(f) (-1, 1).

b) f(x) = 1/3 x - 2x - 6x + 2 dengan D(f) (-1, 1)

**Penyelesaian:**

a) f(x) = 2x3 - 6x2 - 24x + 12

f '(x) = 6x2 - 12x - 24

f ''(x) = 12x - 12

Untuk f ''(x) < 0 diperoleh 12x - 12 < 0 ⇔ x < 1

Hal ini menunjukkan bahwa kurva y = f(x) cekung ke bawah/cembung ke atas pada

interval ( -∞, 1).

Untuk f ''(x) > 0 diperoleh 12x - 12 > 0 ⇔ x > 1

Hal ini menunjukkan bahwa kurva y = f(x) cekung ke atas/ cembung ke bawah

pada interval ( 1, ∞).

b) f(x) = 1/3 x3 - 2x2 - 6x + 2

f '(x) = x2 - 4x - 6

f ''(x) = 2x - 4

Untuk f ''(x) < 0 diperoleh 2x - 4 < 0 ⇔ x < 2

Hal ini menunjukkan bahwa kurva y = f(x) cekung ke bawah/cembung ke atas

pada interval ( -∞, 2).

Untuk f ''(x) > 0 diperoleh 2x - 4 > 0 ⇔ x > 2

Hal ini menunjukkan bahwa kurva y = f(x) cekung ke atas/cembung ke bawah

pada interval ( 2, ∞).

**Definisi titik belok**

Misal fungsi f kontinu pada selang [a,b] dan terdeferensial pada selang (a,b). Jika c ∈ (a,b), maka titik (c, f(c)) disebut titik belok dari kurva y = f(x), jika kurva mempunyai garissinggung pada titik tersebut. Jika c dan x pada interval (a,b) akan berlaku salah satu dari pernyataan berikut:

i) f ''(x) < 0 untuk x < c dan f ''(x) > 0 untuk x > c atau

ii) f ''(x) > 0 untuk x > c dan f ''(x) < 0 untuk x > c.

Definisi titik belok (yang lain).

Suatu titik yang memisahkan bagian cekung ke bawah pada suatu kurva yang kontinu dari bagian cekung ke atas di sebut titik belok dari kurva tersebut.

Sebagai illustrasi dari titik belok perhatikan gambar berikut

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |
|  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |
|  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |
|  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Teorema 2. Misal f suatu fungsi yang diferensiabel pada selang buka (a,b) yang memuat c. Jika (c, f(c)) titik belok kurva y = f(x) dan f''(c) ada, maka f''(c) = 0.

Bukti: Misal fungsi g memenuhi g(x) = f'(x) dan berlaku g'(x) = f''(x). Karena (c,f(c)) titik belok gari grafik f, maka f'(x) berubah tanda pada (c,f(c)), sehingga g juga berubah tanda pada x = c. Berdasar teorema relatif ekstrim, g mencapai relatif ekstrim pada x = c dan c merupakan bilangan/nilai kritis dari g.

Karena g'(c) = f ''(c) dan f ''(c) ada, maka g'(c) ada. g'(c) ada dan pada x = c fungsi g mencapai relatif ekstrim berarti

g'(c) = 0. Akibatnya, f ''(c) = 0. ∎

Catatan:

f ''(c) = 0 belum menjamin fungsi f mempunyai titik belok pada titik (c, f(c)).

Contoh : Diberikan y = x2 - 6x + 2, selidiki apakah y mempunyai titik belok.

Penyelesaian: y = x2 - 6x + 2, maka

y' = 4 x - 6

y'' = 12 x

y'' = 0, didapat x = 0.

Selanjutnya diselidiki pada x = 0

Untuk x < 0, diperoleh y' < 0, y turun

Untuk x > 0 , diperoleh y' < 0 , y turun

Jadi y mempunyai titik belok pada (0,2).

**L A T I H A N**

Tentukan interval-interval dimana grafik dari fungsi-fungsi yang diberikan berikut ini merupakan grafik yang cekung ke atas atau cekung ke bawah.

1. f(x) = x2 + 9x
2. f(x) = x3 + 3x2 - 3x – 3
3. f(x) = x3 - 8x2 + 24x
4. f(x) = 16x4 + 32x3 + 24x2 - 5x – 20
5. f(x) = 1 + x - x2 – x3
6. f(x) = 1/3 x3 – x2 – 3x + 3
7. f(x) = x3 – 6 x2 + 5
8. f(x) = x3(4 – x)
9. Tentukan titik belok dari y = x3 - x4
10. Tentukan titik belok dari y = x4 - 6 x3 + 12 x2 - 8x
11. Tunjukkan bahwa titik-titik belok dari y = terletak pada garis lurus dan tentukan persamaan garis tersebut.
12. Tentukan titik belok dari y = 1 + tanh 3x.
13. Diketahui f(x) = ax2 + bx , tentukan nilai a dan b sehingga grafik y mempunyai titik belok pada (1,2).
14. Tentukan a,b,c pada f(x) = ax3 + bx2 + cx agar grafik y mempunyai titik belok di (1,2) dan garis-singgung pada titik ini bergradien -2.
15. Tentukan a, b, c, d dan e pada f(x) = ax4 + bx3 + cx + dx2+ e agar grafik y

mempunyai titik belok di (1, -1).